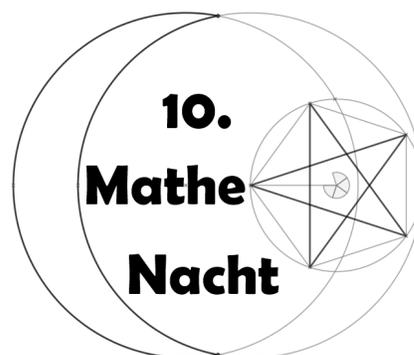


Integralrechnung



1. Aufgabe:

Bestimme eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen!

a) $f_1(x) = \cos x \sin x$

b) $f_2(x) = \cos x e^x$

c) $f_3(x) = \frac{1}{\cosh x}$

d) $f_4(x) = \frac{1}{(4x - 3)^3}$

e) $f_5(x) = \sqrt{x} \ln(x)$

2. Aufgabe:

Untersuche die folgenden Integrale auf Existenz und berechne ggf. den Wert!

a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} dx$, für $s \neq 0$

b) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

c) $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $\int_{-1}^1 \ln|x| dx$

e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx$

f) $\int_0^\infty e^{-x} \sin(x) dx$

3. Aufgabe:

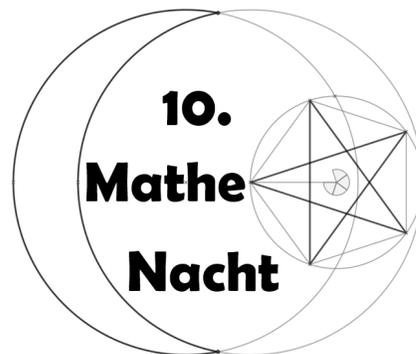
Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn man den Hauptsatz der Integralrechnung und dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

anwendet, dann ist es äquivalent zu welchem der folgenden Terme?

- $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$.
- $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$.
- $(b-a)f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$.
- $(b-a)f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$.
- Keine der obigen Antworten ist richtig.

Topologie



1. Aufgabe:

Wahr oder falsch?

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweise oder widerlege.

- Seien $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $i \in I$ eine beliebige Indexmenge. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen.
- Jede ein-elementige Teilmenge des \mathbb{R}^n ist (folgen-)kompakt.
- (nur für Bachelor-Studierende) Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums X und $Z \subset Y$ abgeschlossen in Y (bzgl. der Teilraumtopologie). Dann ist Z abgeschlossen in X .
- (nur für Bachelor-Studierende) Sei M ein metrischer Raum und $Y \subset M$ zusammenhängend. Dann ist jede beschränkte Teilmenge von Y auch zusammenhängend.
- Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$, dass auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

2. Aufgabe:

Beweise folgende Aussagen:

- Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Zeige, dass $\|\cdot\|$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
- Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist auch

$$M_1 + M_2 := \{a + b : a \in M_1, b \in M_2\}$$

kompakt.

3. Aufgabe:

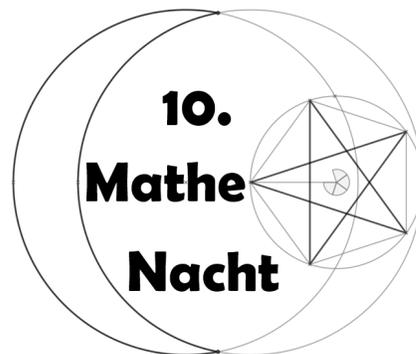
Welche der folgenden Mengen sind offen?

- $M_1 := B(0, 1) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $M_2 := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p \in \mathbb{Q} \text{ oder } q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$
- $M_3 := \{x \in \mathbb{R} : e^x + \sin(x) \in (2, 5)\}$
- $M_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5\}$
- $M_5 := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2^2 = 1\}$
- $M_6 := \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\})$

Welche sind beschränkt?

- M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6

Lokale Approximation



1. Aufgabe:

Voraussetzung für die Berechnung des n -ten Taylorpolynoms von einer Funktion f ist ...

- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist n -mal stetig differenzierbar.
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist n -mal stetig differenzierbar.
- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar.
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar.

Das Restglied der Taylor-Entwicklung sieht wie folgt aus:

- $R_n(x) = \frac{1}{n} \int_{x_0}^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt$
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$, wobei $\xi = x_0 + \Theta(x-x_0)$, $\Theta \in (0, 1)$
- $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt$
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-\xi)^{n+1}$, wobei $\xi = x_0 + \Theta(x-x_0)$, $\Theta \in (0, 1)$

2. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

Das Newton-Verfahren...

- ... nutzt die Näherung von Funktionswerten von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mittels Tangenten an f .
- ... dient der exakten analytischen Bestimmung der Lösung von $f(x) = 0$.
- ... geht davon aus, dass es tatsächlich eine Lösung $\xi \in \mathbb{R}$ von $f(x) = 0$ gibt.
- ... benötigt einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

- a) Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^3$.

4. Aufgabe:

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$.

- a) Bestimme die Taylor-Reihe $T(x)$ für f in $x_0 = 0$.
- b) Gib an, unter welcher Bedingung $f(x) = T(x)$ ist.

5. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

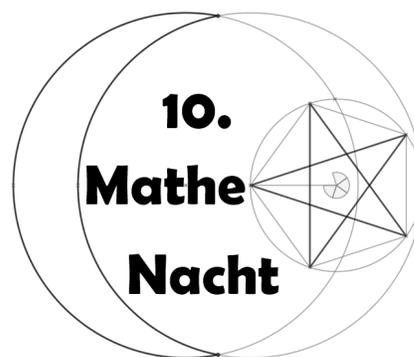
Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x - 5)e^x + 5$. Die Funktion f hat im Intervall $I := [\frac{9}{2}, 5]$ eine Nullstelle ξ . Gib eine rekursive Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ an, die gegen ξ konvergiert.

6. Aufgabe:

Gib das Taylorpolynom 3. Ordnung von \sqrt{x} im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an:

$$T(\sqrt{x}, 1)(x) = \frac{1}{16} (_ + _(x - 1) + _(x - 1)^2 + _(x - 1)^3)$$

Extrema



1. Aufgabe:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x - 21y$ hat vier extremwertverdächtige Stellen. Welche sind das?

$$(x_1, y_1) = (3, \underline{\quad}), \quad (x_2, y_2) = (-3, \underline{\quad}), \quad (x_3, y_3) = (1, \underline{\quad}), \quad (x_4, y_4) = (-1, \underline{\quad})$$

2. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = c + \delta x^2 + \epsilon y^2$, wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\delta, \epsilon \in \{-1, 1\}$ sind. Man ordne zu, für welche δ und ϵ im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Maximum, lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

$\epsilon = \delta = 1$

Lokales Minimum

$\epsilon = \delta = -1$

Lokales Maximum

$\epsilon = 1, \delta = -1$

Sattelpunkt

3. Aufgabe:

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(x) + y(y + 2).$$

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von f !

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = \operatorname{Im}((x + iy)^3)$. Man untersuche, ob in $(0, 0)$ ein lokales Extremum vorliegt.

5. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

Für welchen Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ wird $f(x) = \|x\|_2^2$ unter der Nebenbedingung $(a|x)_2 = 1, a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ minimal?

$x = \frac{-a}{\|a\|_2}$

$x = \frac{a}{\|a\|_2}$

$x = \frac{-a}{\|a\|_2}$

$x = \frac{a}{\|a\|_2}$

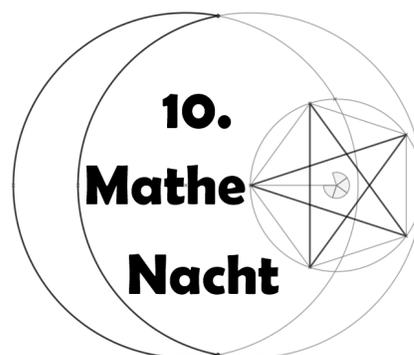
6. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x \cdot y$ nimmt auf dem Einheitskreis in zwei Punkten ein lokales Minimum und in zwei Punkten ein lokales Maximum an. Gib diese Punkte an!

- lokale Minima: $(_, _)$, $(_, _)$
- lokale Maxima: $(_, _)$, $(_, _)$

Implizite Funktionen und Banachscher Fixpunktsatz



1. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}e^x + \tan(y) &= 1 \\ x^2 + z^3 + z &= 0\end{aligned}$$

eine implizite Lösung in Form von Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ in der Nähe von $(0, 0, 0)$ besitzt. Untersuche die Lösungen auf ihrem Definitionsbereich auf Monotonie!

2. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2uv \\ x^3 + y^3 &= v^3 - u^3\end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x, y, u, v) = (-1, 1, 1, 1)$ nach $u(x, y)$ und $v(x, y)$ aufgelöst werden kann. Berechne außerdem g' in der betrachteten Umgebung, wobei $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$ ist.

3. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

a) Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin(x) = x$$

genau eine Lösung auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ hat.

b) Zeige, dass die Gleichung

$$x^2 + 3 = e^x$$

genau eine Lösung auf $[0, \infty)$ hat.

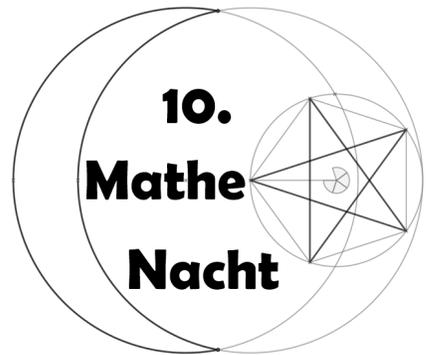
4. Aufgabe:

(nur für Lehramt-Studierende)

Kreuze die richtigen Aussagen an!

- Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung um $(-1, 0)$ nach $y(x)$ auflösbar.
- Die Funktion $f : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung um $(1, \pi)$ umkehrbar.
- Eine Funktion $f : M \rightarrow M$ ist genau dann eine Kontraktion, wenn $\max_{x \in M} |f'(x)| \leq 1$ ist.

Stetigkeit & Differenzierbarkeit



1. Aufgabe:

Gilt folgende Aussage? Eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt x_0 auch stetig. Beweise deine Antwort!

2. Aufgabe:

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Untersuche f im Punkt $(0,0)$ auf Stetigkeit.
- Untersuche f im Punkt $(0,0)$ auf Differenzierbarkeit.

3. Aufgabe:

Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x) \sin(y)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ auf

- Stetigkeit,
- partielle Differenzierbarkeit und
- Differenzierbarkeit.

4. Aufgabe:

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass die partiellen Ableitungen für jede Kugel $B_r(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ unbeschränkt sind!

5. Aufgabe:

Berechne die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen an den Stellen ξ in den Richtungen $\frac{v}{\|v\|}$. Bestimme auch die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktionen an der Stelle ξ .

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(\frac{1}{2}xy)$ in $\xi = (1, 2)$ und $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = e^{xyz}$ in $\xi = (1, 1, 1)$ und $v = (1, 2, -1)$

6. Aufgabe:

Sei $f(x, y, z) = x^{y/z}$. Ordne jeweils einem Term aus der ersten Gruppe einer partiellen Ableitung aus der 2. Gruppe zu:

$$G_1 : \frac{y}{z}x^{y/z-1}, \quad \frac{\ln(x)}{z}x^{y/z}, \quad \frac{-\ln(x)y}{z^2}x^{y/z}, \quad \frac{\ln(x)^2}{z^2}x^{y/z}, \quad \frac{y^2 - yz}{z^2}x^{y/z-2}$$

$$G_2 : \partial_{yy}f, \quad \partial_zf, \quad \partial_yf, \quad \partial_xf, \quad \partial_{xx}f$$