10. Mathe Nacht

Integralrechnung

1. Aufgabe:

Bestimme eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen!

a) $f_1(x) = \cos x \sin x$

b) $f_2(x) = \cos x e^x$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$

d) $f_4(x) = \dfrac{1}{(4x-3)^3}$

e) $f_5(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

2. Aufgabe:

Untersuche die folgenden Integrale auf Existenz und berechne ggf. den Wert!

a) $\int_0^\infty \dfrac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}}\mathrm{d}x$, für $s \neq 0$

b) $\int_{-1}^0 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

c) $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $\int_{-1}^1 \ln|x|\mathrm{d}x$

e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$

f) $\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x$

3. Aufgabe:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn man den Hauptsatz der Integralrechnung und dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf das Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

anwendet, dann ist es äquivalent zu welchem der folgenden Terme?

- ☐ $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ $(b-a)f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ $(b-a)f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

10. Mathe Nacht

Topologie

1. Aufgabe:

Wahr oder falsch?

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweise oder widerlege.

a) Seien $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $i \in I$ eine beliebige Indexmenge. Dann ist auch $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ offen.

b) Jede ein-elementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist (folgen-)kompakt.

c) (nur für Bachelor-Studierende) Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums X und $Z \subset Y$ abgeschlossen in Y (bzgl. der Teilraumtopologie). Dann ist Z abgeschlossen in X.

d) (nur für Bachelor-Studierende) Sei M ein metrischer Raum und $Y \subset M$ zusammenhängend. Dann ist jede beschränkte Teilmenge von Y auch zusammenhängend.

e) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^m$, dass auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

2. Aufgabe:

Beweise folgende Aussagen:

a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\|\cdot\|$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist.

b) Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist auch

$$M_1 + M_2 := \{a + b : \quad a \in M_1,\ b \in M_2\}$$

kompakt.

3. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind offen?

☐ $M_1 := B(0,1)\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

☐ $M_2 := \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : \quad p \in \mathbb{Q} \text{ oder } q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$

☐ $M_3 := \{x \in \mathbb{R} : \quad e^x + \sin(x) \in (2,5)\}$

☐ $M_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 5\}$

☐ $M_5 := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\|_2^2 = 1\}$

☐ $M_6 := \mathbb{R}\backslash(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}\})$

Welche sind beschränkt?

☐ M_1 ☐ M_2 ☐ M_3 ☐ M_4 ☐ M_5 ☐ M_6

Lokale Approximation

1. Aufgabe:

Voraussetzung für die Berechnung des $n-$ten Taylorpolynoms von einer Funktion f ist ...

- ☐ $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist $n-$mal stetig differenzierbar.
- ☐ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist $n-$mal stetig differenzierbar.
- ☐ $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist $(n + 1)-$mal stetig differenzierbar.
- ☐ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist $(n + 1)-$mal stetig differenzierbar.

Das Restglied der Taylor-Entwicklung sieht wie folgt aus:

- ☐ $R_n(x) = \frac{1}{n} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$
- ☐ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$, wobei $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0), \Theta \in (0, 1)$
- ☐ $R_n(x) = \dfrac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$
- ☐ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}$, wobei $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0), \Theta \in (0, 1)$

2. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Das Newton-Verfahren...

- ☐ ... nutzt die Näherung von Funktionswerten von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittels Tangenten an f.
- ☐ ... dient der exakten analytischen Bestimmung der Lösung von $f(x) = 0$.
- ☐ ... geht davon aus, dass es tatsächlich eine Lösung $\xi \in \mathbb{R}$ von $f(x) = 0$ gibt.
- ☐ ... benötigt einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

a) Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^3$.

4. Aufgabe:

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$.

a) Bestimme die Taylor-Reihe $T(x)$ für f in $x_0 = 0$.

b) Gib an, unter welcher Bedingung $f(x) = T(x)$ ist.

5. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-5)e^x + 5$. Die Funktion f hat im Intervall $I := [\frac{9}{2}, 5]$ eine Nullstelle ξ. Gib eine rekursive Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ an, die gegen ξ konvergiert.

6. Aufgabe:

Gib das Taylorpolynom 3. Ordnung von $\sqrt{x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an:

$$T(\sqrt{x}, 1)(x) = \frac{1}{16}\big(\_\_\_ + \_\_\_(x-1) + \_\_\_(x-1)^2 + \_\_\_(x-1)^3\big)$$

10. Mathe Nacht

Extrema

1. Aufgabe:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x - 21y$ hat vier extremwertverdächtige Stellen. Welche sind das?

$$(x_1, y_1) = (3, \_\_\_), \quad (x_2, y_2) = (-3, \_\_\_), \quad (x_3, y_3) = (1, \_\_\_), \quad (x_4, y_4) = (-1, \_\_\_)$$

2. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = c + \delta x^2 + \epsilon y^2$, wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\delta, \epsilon \in \{-1, 1\}$ sind. Man ordne zu, für welche δ und ϵ im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Maximum, lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

$\varepsilon = \delta = 1$	Lokales Minimum
$\varepsilon = \delta = -1$	Lokales Maximum
$\varepsilon = 1, \delta = -1$	Sattelpunkt

3. Aufgabe:

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(x) + y(y + 2).$$

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von f!

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = \operatorname{Im}\big((x + iy)^3\big)$. Man untersuche, ob in $(0, 0)$ ein lokales Extremum vorliegt.

5. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Für welchen Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ wird $f(x) = \|x\|_2^2$ unter der Nebenbedingung $(a|x)_2 = 1, a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ minimal?

- ☐ $x = \frac{-a}{\|a\|_2^2}$
- ☐ $x = \frac{a}{\|a\|_2^2}$
- ☐ $x = \frac{-a}{\|a\|_2}$
- ☐ $x = \frac{a}{\|a\|_2}$

6. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x \cdot y$ nimmt auf dem Einheitskreis in zwei Punkten ein lokales Minimum und in zwei Punkten ein lokales Maximum an. Gib diese Punkte an!

- lokale Minima: $(\_\_\_, \_\_\_), (\_\_\_, \_\_\_)$
- lokale Maxima: $(\_\_\_, \_\_\_), (\_\_\_, \_\_\_)$

Implizite Funktionen und Banachscher Fixpunktsatz

1. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$e^x + \tan(y) = 1$$
$$x^2 + z^3 + z = 0$$

eine implizite Lösung in Form von Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ in der Nähe von $(0, 0, 0)$ besitzt. Untersuche die Lösungen auf ihrem Definitionsbereich auf Monotonie!

2. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 2uv$$
$$x^3 + y^3 = v^3 - u^3$$

in einer Umgebung von $(x, y, u, v) = (-1, 1, 1, 1)$ nach $u(x, y)$ und $v(x, y)$ aufgelöst werden kann. Berechne außerdem g' in der betrachteten Umgebung, wobei $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$ ist.

3. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

a) Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin(x) = x$$

genau eine Lösung auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ hat.

b) Zeige, dass die Gleichung

$$x^2 + 3 = e^x$$

genau eine Lösung auf $[0, \infty)$ hat.

4. Aufgabe:
(nur für Lehramt-Studierende)

Kreuze die richtigen Aussagen an!

- ☐ Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung um $(-1, 0)$ nach $y(x)$ auflösbar.
- ☐ Die Funktion $f : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $f(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung um $(1, \pi)$ umkehrbar.
- ☐ Eine Funktion $f : M \to M$ ist genau dann eine Kontraktion, wenn $\max\limits_{x \in M} |f'(x)| \leq 1$ ist.

Stetigkeit & Differenzierbarkeit

10. Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gilt folgende Aussage? Eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist im Punkt x_0 auch stetig. Beweise deine Antwort!

2. Aufgabe:

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Untersuche f im Punkt (0,0) auf Stetigkeit.

b) Untersuche f im Punkt (0,0) auf Differenzierbarkeit.

3. Aufgabe:

Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ auf

a) Stetigkeit,

b) partielle Differenzierbarkeit und

c) Differenzierbarkeit.

4. Aufgabe:

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass die partiellen Ableitungen für jede Kugel $B_r(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ unbeschränkt sind!

5. Aufgabe:

Berechne die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen an den Stellen ξ in den Richtungen $\frac{v}{||v||}$. Bestimme auch die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktionen an der Stelle ξ.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(\frac{1}{2}xy)$ in $\xi = (1, 2)$ und $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = e^{xyz}$ in $\xi = (1, 1, 1)$ und $v = (1, 2, -1)$

6. Aufgabe:

Sei $f(x, y, z) = x^{y/z}$. Ordne jeweils einem Term aus der ersten Gruppe einer partiellen Ableitung aus der 2. Gruppe zu:

$$G_1 : \frac{y}{z}x^{y/z-1}, \quad \frac{ln(x)}{z}x^{y/z}, \quad \frac{-ln(x)y}{z^2}x^{y/z}, \quad \frac{ln(x)^2}{z^2}x^{y/z}, \quad \frac{y^2 - yz}{z^2}x^{y/z-2}$$

$$G_2 : \partial_{yy}f, \quad \partial_z f, \quad \partial_y f, \quad \partial_x f, \quad \partial_{xx}f$$